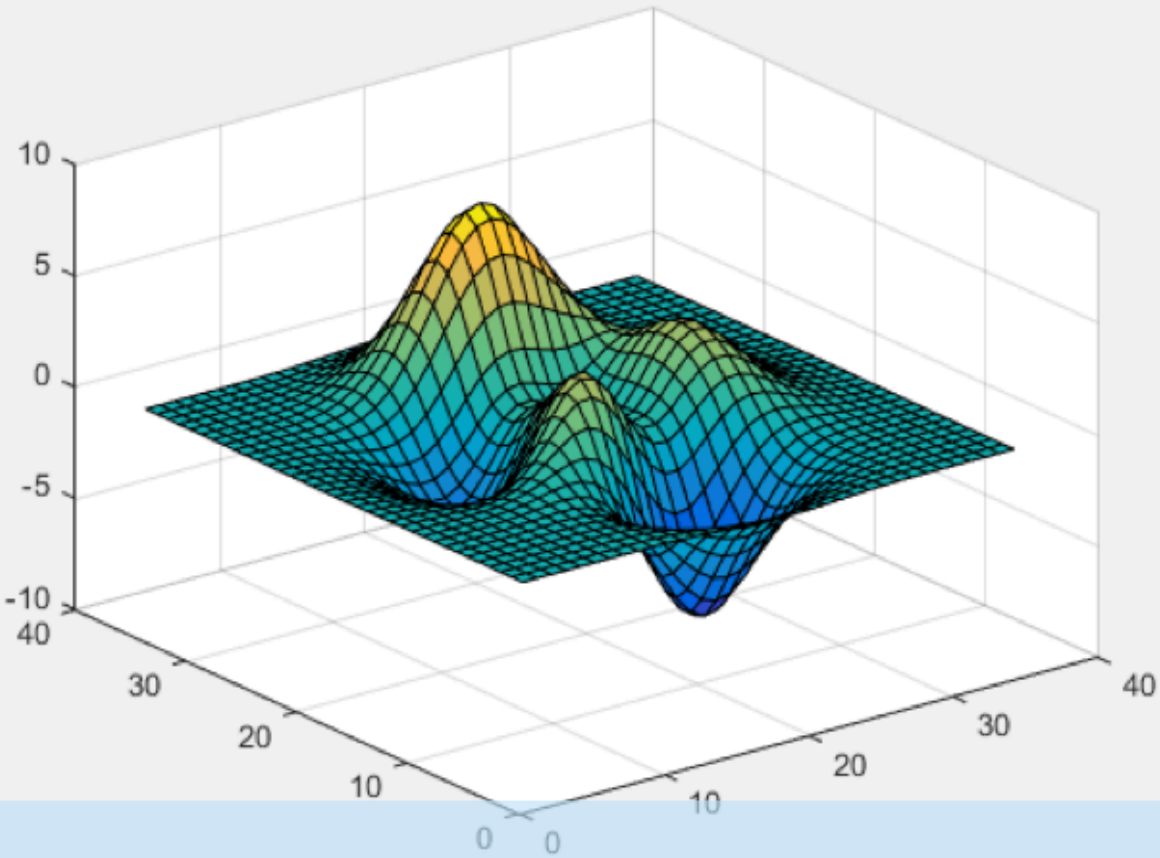


Álgebra Elemental

Curso propedéutico
Programa de Ingeniero Electricista

Universidad Autónoma de Zacatecas

Dr. Manuel Reta Hernández

Dr. Diego Esparza Salazar

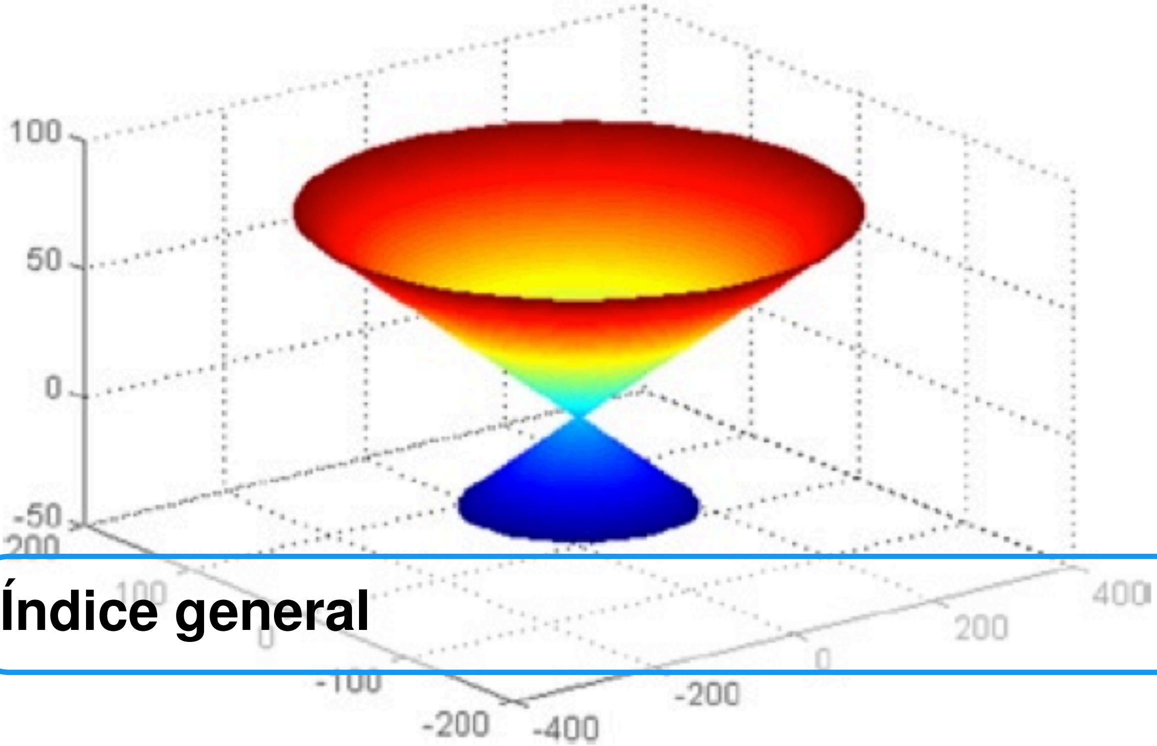
Dr. Jesús Manuel Rivas Martínez

M. en I. Aurelio Beltrán Telles

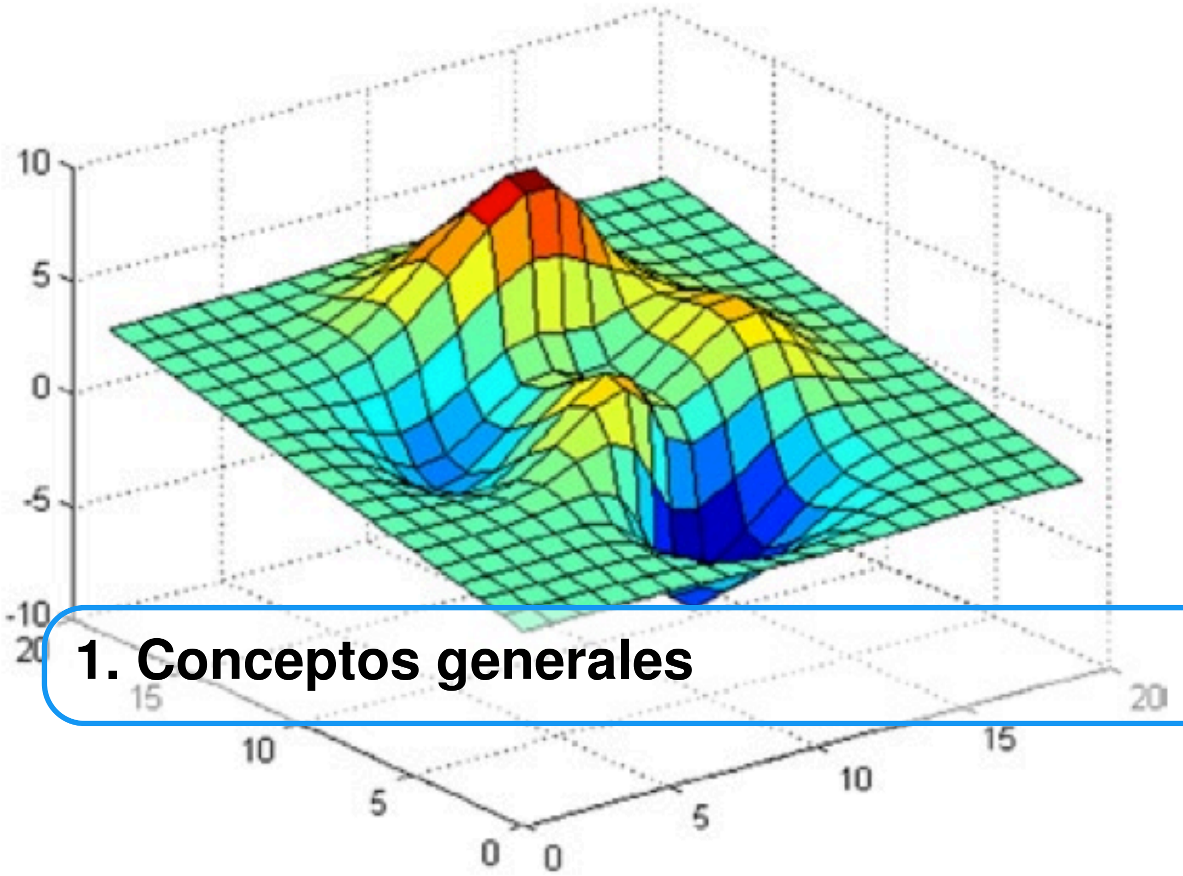
Dra. María de la Luz Medina Llamas

Dr. Francisco Bañuelos Ruedas

Julio de 2025



Índice general



1. Conceptos generales

1.1 Números reales

Las cantidades se representan con números, y esos números tienen un orden indicado en la **escala de los números reales** que vá desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (Fig. 1.1).

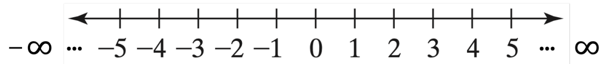


Figura 1.1: Escala de los números reales.

Todo ese conjunto de números tiene varias definiciones.

Números completos. Son aquellos números que representan cantidades enteras positivas, incluyendo al cero. Ejem.: 0, 2, 7, 8, 12.

Números naturales o enteros positivos. Son aquellos que representan a las cantidades enteras, y se encuentra a la derecha del cero en la escala de los números reales. Ejem.: 1, 5, 10, 21.

Números primos son números naturales, diferentes del 1, cuyos factores comunes son el 1 y si mismo (sólo puede dividirse por el 1 y por sí mismo). Ejem: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Números enteros negativos. Son el espejo de los números enteros positivos, y se encuentran a la izquierda del cero en la escala de los números reales. Ejem.: -1, -5, -10, -21. En la vida diaria, no todas las cantidades se representan con los números completos. Por ejemplo, para representar una temperatura muy baja se indica con números enteros negativos. Ejem.: -2ºC, -10ºC.

Números racionales. Representan a cantidades expresadas como un cociente de $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, siendo $b \neq 0$. Ejem.: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$. En ese sentido, todos los números enteros también son números racionales, ya que cada entero se puede expresar como el cociente de sí mismo y el 1. Ejem.: $\frac{5}{1}$, $-\frac{3}{1}$.

Números irracionales. Son aquellos números no enteros que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros. Ejem. π, $\sqrt{2}$. Tanto los números racionales como los irracionales se pueden representar en forma decimal. Ejem.: $\frac{1}{2} = 0.5$, $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$, $\frac{2}{3} = 0.6666\ldots$

Números reales. Es el conjunto de todos los números racionales y los irracionales.

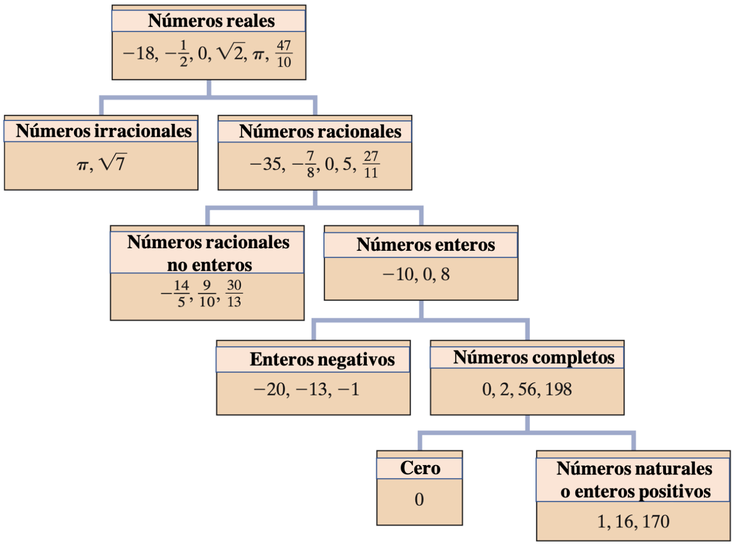


Figura 1.2: Clasificación de los números reales.

1.1.1 Fracciones

Al cociente de dos números se le llama **fracción**, en donde la parte de arriba es el **numerador** y la parte de abajo es el **denominador**. Una fracción se utiliza para indicar a la parte de un todo. Por ejemplo, $2/3$ indica dos partes de un grupo de tres.

Una fracción está simplificada o **en su mínima expresión** cuando el numerador y el denominador sólo tienen al número 1 como factor común (es decir sólo se pueden dividir entre 1).

Principio de las fracciones

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción y c es un número real diferente de 0, entonces $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$

Suma y resta de fracciones con el mismo denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \text{donde } b \neq 0 \tag{1.1}$$

■ Ejemplo 1.1

$$\frac{9}{7} - \frac{2}{7} = \frac{9-2}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

■

■ Ejemplo 1.2

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3+2-1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

■

Suma y resta de fracciones con diferente denominador

Para sumar o restar fracciones con diferentes denominadores, primero se anotan las fracciones como fracciones equivalentes con el mismo denominador. Se usa el denominador común más pequeño también llamado el **mínimo común denominador mcd**.

■ **Ejemplo 1.3**

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8+5}{5\cdot 4}=\frac{13}{20}$$

■

■ **Ejemplo 1.4**

$$\frac{1}{2}+\frac{17}{22}-\frac{2}{11}=\frac{11+17-4}{22}=\frac{24}{22}=\frac{12}{11}$$

■

Producto de fracciones

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\quad \text{donde } \; b\neq 0 \;\; y \;\; d\neq 0 \tag{1.2}$$

■ **Ejemplo 1.5**

$$\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{13}=\frac{2\cdot 5}{15\cdot 13}=\frac{2}{39}$$

■

División de fracciones

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\quad \text{donde } \; b\neq 0,\;\; d\neq 0,\;\; y \;\; c\neq 0 \tag{1.3}$$

■ **Ejemplo 1.6**

$$\frac{4}{5}\div\frac{5}{16}=\frac{4\cdot 16}{5\cdot 5}=\frac{64}{25}$$

■

1.2 Definiciones de álgebra

Álgebra es una rama de las matemáticas dedicada al estudio general de las cantidades. Las expresiones algebraicas describen en forma matemática a ciertos fenómenos físicos y a problemas donde se puede simplificar la información de los fenómenos físicos.

En aritmética, las cantidades se representan con números.

En álgebra, las cantidades pueden ser representadas con letras o con números y letras (literales), donde los números se usan para representar cantidades conocidas y las letras para representar tanto cantidades conocidas como no conocidas.

Para expresar **cantidades conocidas**, generalmente se utilizan las primeras letras minúsculas del alfabeto $(a,b,c,d\ldots)$.

Para expresar **cantidades desconocidas**, generalmente se utilizan las últimas letras minúsculas del alfabeto (v,w,x,y,z).

1.2.1 Término algebraico

Una cantidad puede representarse utilizando números y letras combinados con operaciones de multiplicación o división. A esto se le denomina **término algebraico**.

Un término algebraico tiene cuatro elementos: a) el signo, b) el coeficiente, c) las literales y d) el grado.

El **signo** indica el valor positivo o negativo del término algebraico.

El **coeficiente** es el primero de los factores del término algebraico.

Las **literales** son las letras de un término algebraico que representa a las cantidades conocidas y desconocidas.

El **grado** de un término algebraico, con relación a una literal, es el exponente de dicha literal.

■ **Ejemplo 1.7** Los siguientes son términos algebraicos: $x, \quad -2xy, \quad \sqrt{5}\,y, \quad \dfrac{-3ax^2}{y}$ ■

1.2.2 Expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es el conjunto de sumas o restas (suma algebraica) de varios términos algebraicos.

A la expresión algebraica con un sólo término algebraico se le llama **monomio**. Ejemplo: $-2x$
Si contiene dos términos algebraicos se le denomina **binomio**.

■ **Ejemplo 1.8** $5x+2y$ ■

Si contiene tres términos algebraicos se le denomina **trinomio**.

■ **Ejemplo 1.9** $2xy-5y^2+\dfrac{3ax^2}{y}$ ■

En general, si contiene más de un sólo término algebraico se le denomina **polinomio**.

El **grado** de un polinomio con respecto a una literal es el exponente mayor de esa literal.

■ **Ejemplo 1.10** En la expresión algebraica $2x^2y+4x^3y^2-x^4y^3$ el polinomio es de grado 4 en x, y de grado 3 en y. ■

1.2.3 Signos

Los signos utilizados en álgebra son de tres tipos:

signos de operación: suma $(+)$, resta $(-)$, multiplicación $(\times)$, división $(\div)$, elevación de potencia (x^n), y raíz o radical $(\sqrt[n]{x})$. En el caso de la multiplicación de dos cantidades, se puede expresar como $a\times b$, como $(a)(b)$, como $a\cdot b$, o simplemente como ab.

signos de relación: son empleados para indicar la relación entre dos cantidades, y son: igual $(=)$, menor que $(<)$, y mayor que $(>)$.

signos de agrupación: son empleados para indicar que la operación colocada entre esos signos debe efectuarse primero, y son: los paréntesis ( ), los corchetes cuadrados [ ], y las llaves { }.

En álgebra, las cantidades positivas se indican anteponiendo el signo $(+)$ y las cantidades negativas anteponiendo el signo $(-)$. Sin embargo, si una cantidad no tiene ninguno de esos signos, se asume que es una cantidad positiva. El cero representa ausencia de cantidad.

1.3 Exponentes y radicales

1.3.1 Propiedades de los exponentes

Si a y b son números reales y m y n son enteros positivos, entonces:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(ab)^n = a^n b^n$
3. $(a^m)^n = a^{m\times n}$
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6. $a^0 = 1$, donde $a \neq 0$
7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

La n-ésima **potencia** de un número es el producto de n factores iguales a dicho número.

■ **Ejemplo 1.11** $y^2 = y \times y$ ■

■ **Ejemplo 1.12** $3a^3 = 3(a \times a \times a)$ ■

■ **Ejemplo 1.13** $(4b)^4 = (4b) \times (4b) \times (4b) \times (4b)$ ■

1.3.2 Propiedades de los radicales

Si a y b son números reales y m y n son enteros positivos, entonces:

1. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, donde $b \neq 0$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
6. $a^0 = 1$, donde $a \neq 0$
7. Para n par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. Para n impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$

Si a y b son números reales y m y n son enteros positivos, entonces:

La n-ésima **raíz** de un número se indica como $\sqrt[n]{a}$, donde al signo es el radical, n es el orden del radical y a es el radicando.

■ **Ejemplo 1.14** $\sqrt[n]{a} = b$ sí y sólo si $b^n = a$ ■

■ **Ejemplo 1.15** $\sqrt{16} = 4$ ya que $4^2 = 16$ ■

■ **Ejemplo 1.16** $\sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = -8$ ■

1.3.3 Definición de exponente racional

Si a es un número real y n es un entero positivo tal que existe la n-ésima raíz de a, entonces:

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, donde $\frac{1}{n}$ es el exponente racional de a

Más aún, si m es un entero positivo que no tiene factor común con n, entonces:

$a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$ y $a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$

1.3.4 Simplificación de expresiones algebraicas

Una aplicación importante de las leyes de los exponentes y de la factorización es la **simplificación** de expresiones algebraicas donde aparecen fracciones.

■ **Ejemplo 1.17** Escribir una expresión equivalente a $(a^{-2}b)^{-3}$ en la cual aparezcan solamente exponentes positivos.

Solución. De las leyes de los exponentes, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(a^{-2}b\right)^{-3} &= \left(\frac{b}{a^2}\right)^{-3} \\
&= \frac{b^{-3}}{a^{-6}} \\
&= \frac{a^6}{b^3}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.18** Desarrollar la expresión $\left(\dfrac{a^2b}{c^3}\right)^5$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^5 &= \frac{\left(a^2\right)^5 b^5}{\left(c^3\right)^5} \\
&= \frac{a^{10}b^5}{c^{15}}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.19** Simplificar la expresión $\dfrac{x^4y}{x^2y^2}$, asumiendo que el producto xy es diferente de cero.

$$\begin{aligned}
\frac{x^4y}{x^2y^2} &= \frac{\left(x^2y\right)x^2}{\left(x^2y\right)y} \\
&= \frac{x^2}{y}
\end{aligned}$$

■

1.4 Reglas básicas del álgebra

Si a, b, y x son números reales, variables o expresiones algebraicas, entonces se tienen las siguientes propiedades del álgebra:

1. Propiedad conmutativa de la suma	$a+b=b+a$
2. Propiedad conmutativa de la multiplicación	$ab=ba$
3. Propiedad asociativa de la suma	$(a+b)+x=a+(b+x)$
4. Propiedad asociativa de la multiplicación	$(ab)x=a(bx)$
5. Propiedades distributiva	$a(b+x)=ab+ax$
6. Propiedad de identidad de la suma	$a+0=a$
7. Propiedad de identidad de la multiplicación	$a\cdot 1=a$
8. Propiedad inversa de la suma	$a+(-a)=0$
9. Propiedad inversa de la multiplicación	$a\cdot\frac{1}{a}=1$, donde $a\neq 0$

1.4.1 Propiedades de negación e igualdad

Si a, b, y x son números reales, variables o expresiones algebraicas, entonces se tienen las siguientes propiedades de negación e igualdad:

1. $(-1)a=-a$
2. $-(-a)=a$
3. $(-a)b=-(ab)=a(-b)$
4. $(-a)(-b)=ab$
5. $-(a+b)=(-a)+(-b)$
6. Si $a=b$, entonces $a\pm x=b\pm x$
7. Si $a=b$, entonces $a\cdot x=b\cdot x$
8. Si $a\pm x=b\pm x$, entonces $a=b$
9. Si $a\cdot x=b\cdot x$, entonces $a=b$

1.4.2 Propiedades de cero

Si a y b son números reales, variables o expresiones algebraicas, entonces se tienen las siguientes propiedades de cero:

1. $a+0=a$ y $a-0=a$
2. $a\cdot 0=0$
3. $\frac{0}{a}=0$, donde $a\neq 0$

4. $\dfrac{a}{0}$ es indeterminado.
5. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$

1.4.3 Propiedades y operaciones de fracciones

Si a, b, x, y y son números reales, variables o expresiones algebraicas, donde $b \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces se tienen las siguientes propiedades de fracciones:

1. Fracciones equivalentes	$\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y}$, sí y sólo si $ay = bx$
2. Reglas de los signos	$-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ y $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$
3. Fracciones equivalentes generadas	$\dfrac{a}{b} = \dfrac{ax}{bx}$, donde $x \neq 0$
4. Suma o resta con denominadores semejantes	$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{x}{b} = \dfrac{a \pm x}{b}$
5. Suma o resta con denominadores diferentes	$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{x}{y} = \dfrac{ay \pm bx}{by}$
6. Producto de fracciones	$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{x}{y} = \dfrac{ax}{by}$
7. División de fracciones	$\dfrac{a}{b} \div \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{ay}{bx}$, donde $x \neq 0$

1.5 Operaciones básicas del álgebra

Un término algebraico es **semejante** a otro, si ambos tienen exactamente las mismas variables elevadas exactamente a los mismos exponentes, y solamente difieren en los coeficientes de dichos términos.

Un término algebraico es **igual** a otro, si ambos tienen exactamente las mismas variables elevadas exactamente a los mismos exponentes y los coeficientes de dichos términos también son iguales.

Cuando en una expresión algebraica aparecen dos o más términos semejantes combinados con las operaciones de suma o resta, la expresión se puede simplificar realizando las sumas o restas correspondientes. La nueva expresión obtenida es igual que la original y se pueden relacionar mediante el signo de igualdad (=).

Por ejemplo, en la expresión $4x + 10x - 5x + 13x + 12x - 15x$ aparecen términos semejantes con diferentes coeficientes. Por tanto, dicha expresión se puede simplificar como $4x + 10x - 5x + 13x + 12x - 15x = 19x$.

Para simplificar una expresión algebraica primero se efectúan las operaciones dentro de los paréntesis, luego las multiplicaciones y/o divisiones, y finalmente las sumas y restas.

■ **Ejemplo 1.20**

$$\begin{aligned} (a+3b-5a)+4a+[-(6b+2d+3b)] &= (3b-4a)+4a+(-9b-2d) \\ &= 3b-9b-2d \\ &= -6b-2d \end{aligned}$$

■

1.5.1 Suma algebraica (suma o resta)

Para sumar o restar dos o más expresiones algebraicas, es recomendable observar si tienen o no términos semejantes o iguales. En el caso de que existan, se suman o restan entre sí dichos términos y los términos no semejantes se escriben sin modificación alguna.

Para restar una expresión de otra, es recomendable escribir entre paréntesis la expresión que corresponde al sustraendo y observar si éstas tienen o no términos semejantes o iguales. En el caso de que existan, se restan entre sí dichos términos y los términos no semejantes se escriben sin modificar los que están en el minuendo y se cambia el signo a los que se encuentran en el sustraendo.

■ **Ejemplo 1.21**

$$\begin{aligned}(2x+3y-5)+(4x-5y)+(x^2+2x-4) &= (2x+4x+2x)+(3y-5y)+(-5-4)+x^2\\ &= 8x-2y-9+x^2\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.22**

$$\begin{aligned}(2x+3y-5)-(4x-5y) &= (2x+3y-5)+(-4x+5y)\\ &= (2x-4x)+(3y+5y)-5\\ &= -2x+8y-5\end{aligned}$$

■

1.5.2 Producto algebraico

Para multiplicar dos expresiones algebraicas se utilizan las mismas propiedades de las operaciones con números reales, así como las de los exponentes.

Propiedad conmutativa.	$ax = xa$
Propiedad asociativa.	$a(bx) = (ab)x$
Propiedad distributiva.	$a(x+y) = ax+ay$
Propiedad de los exponentes.	Ver subsección de exponentes y radicales.

■ **Ejemplo 1.23**

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y) &= x^2-xy+yx-y^2\\ &= x^2-y^2\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.24**

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y)\\ &= x^2+xy+yx+y^2\\ &= x^2+2xy+y^2\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.25**

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) \\
&= (x^2+2xy+y^2)(x+y) \\
&= x^2(x+y)+2xy(x+y)+y^2(x+y) \\
&= x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2+y^2x+y^3 \\
&= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.26**

$$\begin{aligned}
(x-y)^4 &= (x-y)(x-y)(x-y)(x-y) \\
&= [(x-y)(x-y)]\,[(x-y)(x-y)] \\
&= (x^2-2xy+y^2)(x^2-2xy+y^2) \\
&= x^4-2x^3y+x^2y^2-2x^3y+4x^2y^2-2xy^3+y^2x^2-2xy^3+y^4 \\
&= x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.27**

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}a^2-ab+\frac{2}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right) &= \frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)-ab\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)+\frac{2}{3}b^2\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right) \\
&= \frac{1}{16}a^3-\frac{3}{8}a^2b-\frac{1}{4}a^2b+\frac{3}{2}ab^2+\frac{2}{12}b^2a-\frac{6}{6}b^3 \\
&= \frac{1}{16}a^3-\frac{5}{8}a^2b+\frac{5}{3}ab^2-b^3
\end{aligned}$$

■

1.5.3 Productos notables

Existen productos de polinomios que aparecen frecuentemente en ciertas expresiones algebraicas. Las operaciones algebraicas pueden simplificarse conociendo de antemano los resultados de esos polinomios llamados **productos notables**.

Binomio conjugado. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Binomio al cuadrado. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

Binomio al cubo. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

Suma de dos cubos. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

Diferencia de dos cubos. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Producto de dos binomios con término común. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

1.5.4 División algebraica

En la división de dos expresiones algebraicas, se deben usar las propiedades de las fracciones de números naturales, tomando en cuenta las leyes de los exponentes.

1. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$
2. $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
3. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
4. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

■ **Ejemplo 1.28** División entre monomios

$$\frac{2x^5y^2}{x^2y} = 2x^3y$$

■

■ **Ejemplo 1.29** División de un polinomio y un monomio

$$\begin{aligned} \frac{-13ax+5ax^2+13x^2}{2ax} &= \frac{-13ax}{2ax} + \frac{5ax^2}{2ax} + \frac{12x^2}{2ax} \\ &= -\frac{13}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{6x}{a} \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.30** Dividir los siguientes polinomios $\dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x+1}$

Procedimiento:

$$\begin{array}{r|l} & x^3 \\ \cline{2-2} x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\ & -x^4-x^3 \\ & \quad 3x^3+6x^2+4x+1 \leftarrow \text{ nuevo dividendo} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^3+3x^2 \\ \cline{2-2} x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\ & -x^4-x^3 \\ & \quad 3x^3+6x^2+4x+1 \\ & \quad -3x^3-3x^2 \\ & \qquad 3x^2+4x+1 \leftarrow \text{ nuevo dividendo} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^3+3x^2+3x \\ \cline{2-2} x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\ & -x^4-x^3 \\ & \quad 3x^3+6x^2+4x+1 \\ & \quad -3x^3-3x^2 \\ & \qquad 3x^2+4x+1 \\ & \qquad -3x^2-3x \\ & \qquad\qquad x+1 \leftarrow \text{ nuevo dividendo} \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^3+3x^2+3x+1 \\ \cline{2-2}
x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\
 & -x^4-x^3 \\
 & \qquad 3x^3+6x^2+4x+1 \\
 & \quad -3x^3-3x^2 \\
 & \qquad\qquad 3x^2+4x+1 \\
 & \qquad\quad -3x^2-3x \\
 & \qquad\qquad\qquad x+1 \\
 & \qquad\qquad\quad -x-1 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0 \leftarrow \text{termina proceso}
\end{array}
$$

■

■ **Ejemplo 1.31** División entre polinomios. Dividir los siguientes polinomios $\dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$

Procedimiento:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad x^2 \\ \cline{2-2}
x^2+2x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\
 & -x^4-2x^3-x^2 \\
 & \qquad 2x^3+5x^2+4x+1 \leftarrow \text{ nuevo dividendo}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\qquad x^2+2x \\ \cline{2-2}
x^2+2x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\
 & -x^4-2x^3-x^2 \\
 & \qquad 2x^3+5x^2+4x+1 \\
 & \quad -2x^3-4x^2-2x \\
 & \qquad\qquad\quad x^2+2x+1 \leftarrow \text{ nuevo dividendo}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
x^2+2x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\
 & -x^4-2x^3-x^2 \\
 & \qquad 2x^3+5x^2+4x+1 \\
 & \quad -2x^3-4x^2-2x \\
 & \qquad\qquad\quad x^2+2x+1 \\
 & \qquad\qquad -x^2-2x-1 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leftarrow \text{termina proceso}
\end{array}
$$

■

■ **Ejemplo 1.32** Dividir los siguientes polinomios $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$

Procedimiento:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2+xy+y^2 \\ \cline{2-2}
x-y & x^3+0x^2+0x-y^3 \\
 & -x^3+x^2y \\
 & \qquad x^2y+0x-y^3 \\
 & \quad -x^2y+xy^2 \\
 & \qquad\qquad xy^2-y^3 \\
 & \qquad\quad -xy^2+y^3 \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

■ **Ejemplo 1.33** Dividir los siguientes polinomios $\dfrac{x^3+y^3}{-xy+x^2+y^2}$

Procedimiento:

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad\quad x+y \\ \hline x^2-xy+y^2 & x^3+0x^2+0x+y^3 \\ & -x^3+x^2y-xy^2 \\ & \quad\quad x^2y-xy^2+y^3 \\ & \quad -x^2y+xy^2-y^3 \\ & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

■

1.6 Factorización

En el producto de dos expresiones algebraicas, las expresiones del multiplicando y del multiplicador son los **factores** de la expresión del producto.

Una expresión algebraica está **factorizada completamente** solamente cuando los factores en que se expresa no contienen otros factores más simples.

El **máximo factor común** (mfc) o **máximo común divisor** (mcd) de un conjunto de enteros se define como el entero mayor que divide a cada uno de los números de dicho conjunto.

Si los términos del polinomio ya tienen un factor común identificado, entonces se emplea la ley distributiva para obtener la factorización del polinomio. Uno de los factores del polinomio es el **mfc** y el otro es el cociente que resulta de dividir el polinomio por el factor común.

■ **Ejemplo 1.34** Factorizar el polinomio $4x^2(2x-1)-8x(2x-1)^2$

Por inspección se observa que el **mfc** es $4x(2x-1)$. Por tanto, los factores buscados son:

$$\begin{aligned} 4x^2(2x-1)-8x(2x-1)^2 &= 4x(2x-1)\left[\frac{4x^2(2x-1)-8x(2x-1)^2}{4x(2x-1)}\right] \\ &= 4x(2x-1)\left[x-2(2x-1)\right] \\ &= 4x(2x-1)(x-4x+2) \\ &= 4x(2x-1)(2-3x) \end{aligned}$$

■

1.6.1 Factorización de diferencia de cuadrados

El producto de las expresiones $(a+b)(a-b)$ siempre es a^2-b^2. A esto se le llama producto de **binomios conjugados**.

■ **Ejemplo 1.35** Factorizar x^2-y^2

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

■

■ **Ejemplo 1.36** Factorizar $x^4 - 81y^4$

$$\begin{aligned} x^4 - 81y^4 &= \left(x^2+9y^2\right)\left(x^2-9y^2\right) \\ &= \left(x^2+9y^2\right)(x+3y)(x-3y) \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.37** Factorizar $(x-1)^3 + y^2(1-x)$

$$\begin{aligned} (x-1)^3 + y^2(1-x) &= (x-1)^3 - y^2(x-1) \\ &= (x-1)[(x-1)^2 - y^2] \\ &= (x-1)(x-1+y)(x-1-y) \end{aligned}$$

■

1.6.2 Factorización de suma algebraica de dos cubos

La suma (o resta) de los cubos de dos términos se puede factorizar como el producto de dos factores, uno de los cuales es la suma (o resta) de las raíces cúbicas de esos términos, y el otro es la suma de sus cuadrados y la resta (o suma) del producto de esos dos términos. Es decir:

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

■ **Ejemplo 1.38** Factorizar $x^3 - y^3$

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

■

■ **Ejemplo 1.39** Factorizar $x^6 + 27y^3$

$$x^6 + 27y^3 = \left(x^2+3y\right)\left(x^4 - 3x^2y + 9y^2\right)$$

■

■ **Ejemplo 1.40** Factorizar $2x^5 - 16y^6x^2$

$$\begin{aligned} 2x^5 - 16y^6x^2 &= 2x^2\left(x^3 - 8y^6\right) \\ &= 2x^2\left(x-2y^2\right)\left(x^2 + 2xy^2 + 4y^4\right) \end{aligned}$$

■

1.6.3 Factorización de trinomios de la forma x^2+bx+c donde b y c son enteros $\neq 0$

Este tipo de trinomios proviene del producto de dos binomios cuyo primer término es x y los segundos términos son tales que sumados dan el coeficiente de x y multiplicados dan el término independiente del trinomio. Es decir:

$$x^2+bx+c=(x+m)(x+n) \qquad \text{donde } b=m+n \text{ y } c=mn$$

■ **Ejemplo 1.41** Factorizar $x^2+2xy+y^2$

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2 &= (x+y)(x+y) \\ &= (x+y)^2 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.42** Factorizar $x^2-2xy+y^2$

$$\begin{aligned} x^2-2xy+y^2 &= (x-y)(x-y) \\ &= (x-y)^2 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.43** Factorizar $x^2-5x-36$

$$x^2-5x-36=(x+4)(x-9)$$

■

Nota: No todo polinomio es factorizable en el conjunto de los números enteros. Muestra de ello son las siguientes expresiones: x^2+2x+2, x^2+3x+4, y x^2-x-8.

1.6.4 Factorización de trinomios de la forma ax^2+bx+c donde a, b, c son enteros y $a\neq 1$, b, $c\neq 0$

Este tipo de trinomios puede representarse como el producto de dos binomios tales que:

1. el producto de los dos primeros términos sea ax^2
2. la suma algebraica de los productos del primer término del binomio 1 por el segundo término del binomio 2, y el segundo término del binomio 1 por el primer término del binomio 2, sea bx
3. el producto de los segundos términos sea c.

■ **Ejemplo 1.44** Factorizar el polinomio $2x^2+10x+12$

$$2x^2+10x+12=(2x+4)(x+3)$$

■

Nota: No todo polinomio es factorizable en el conjunto de los números enteros. Muestra de ello son las siguientes expresiones: $3x^2-4x-6$, $4x^2-8x-4$, y $6x^2+5x+2$.

1.6.5 Factorización por agrupación

Para factorizar un polinomio de cuatro términos, que se supone proviene del producto de dos binomios, se procede como sigue:

1. Agrupar los cuatro términos en dos binomios de modo que cada uno admita un factor común.

2. Indicar en cada grupo el producto del factor común por su binomio correspondiente, el cual resultará el mismo en todos ellos si efectivamente el polinomio dado proviene del producto de dos factores binomios.

3. Indicar el producto del binomio común por la suma algebraica de los otros factores diferentes.

En ocasiones es posible generalizar esta factorización a expresiones de más de cuatro términos, para lo cual se buscará la agrupación más conveniente.

■ **Ejemplo 1.45** Factorizar el polinomio $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$$
\begin{aligned}
x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 &= (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\
&= (x+y)(x+y)^2\\
&= (x+y)^3
\end{aligned}
$$

■

■ **Ejemplo 1.46** Factorizar el polinomio $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

$$
\begin{aligned}
x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 &= (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^2)\\
&= (x+y)(x+y)^3\\
&= (x+y)^4
\end{aligned}
$$

■

■ **Ejemplo 1.47** Factorizar el polinomio $\frac{1}{16}a^3-\frac{5}{8}a^2b+\frac{5}{3}ab^2-b^3$

$$\frac{1}{16}a^3-\frac{5}{8}a^2b+\frac{5}{3}ab^2-b^3=\left(\frac{1}{4}a^2-ab+\frac{2}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b\right)$$

■

■ **Ejemplo 1.48** Factorizar el polinomio $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

$$
\begin{aligned}
x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3 &= 1+\left(x^3-27y^3\right)-\left(9x^2y-27xy^2\right)\\
&= 1+(x-3y)\left(x^2+3xy+9y^2\right)-9xy(x-3y)\\
&= 1+(x-3y)\left(x^2+3xy+9y^2-9xy\right)\\
&= 1+(x-3y)\left(x^2-6xy+9y^2\right)\\
&= 1+(x-3y)(x-3y)^2\\
&= 1+(x-3y)^3
\end{aligned}
$$

■

1.7 Ejercicios

1.7.1 A. Obtenga el valor numérico de las siguientes expresiones

1. $-(-2)^3$
2. $-(-2)^2$
3. $2(3)(-2)(-1)$
4. $-3(3)(-1)$
5. $-2(3)^2(-2)^2$
6. $-2(-2)^3(-1)^2$
7. $3(-2)-(-1)[3-(-2)]^2$
8. $[-1-2(-2)]^2-3(-1)^3$
9. $\dfrac{3^2+(-2)^2}{3+(-2)}$
10. $\dfrac{2(3)(-2)^2(-1)^4}{[-2-(-1)]^4}$
11. $\dfrac{3(-2)}{3}-\dfrac{2(-1)}{-2}$
12. $(3+1)^2(3-1)^2$
13. $-(5^3)$
14. (-5^3)
15. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$
16. -6^0
17. 4^{-2}
18. 3^{-4}
19. $\dfrac{1}{2^{-5}}$
20. $\dfrac{1}{3^{-3}}$
21. $\dfrac{2^{-3}}{6^{-3}}$
22. $\dfrac{4^{-2}}{2^{-3}}$
23. $-2x^0$

24. $\dfrac{x^0}{4}$

25. $4^{3/2}$

26. $-16^{3/2}$

27. $-64^{2/3}$

28. $125^{4/3}$

29. $9^{-3/2}$

30. $32^{-3/5}$

31. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/2}$

32. $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{3/2}$

33. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-4/3}$

34. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3}$

1.7.2 B. Desarrolle las siguientes expresiones hasta su mínima expresión

1. $3(2x)$
2. $-2(4y)$
3. $3(2+x)$
4. $-2(4+y)$
5. $\frac{2}{3}a+\frac{5}{6}a$
6. $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x$
7. $2+3(2x-5)$
8. $4+2(2a-3)$
9. $5-3(4x-2y)$
10. $7-2(5n-8m)$
11. $3(2a-4b)-4(a-3b)$
12. $5(4r-7t)-2(10r+3t)$
13. $5a-2[3-2(4a+3)]$
14. $6+3[2x-4(3x-2)]$
15. $2x^{-4}$
16. $3y^{-2}$
17. $\frac{5}{z^{-6}}$
18. $\frac{8}{x^{-5}}$
19. $(x^3y^2)(xy^5)$
20. $(uv^6)(u^2v)$
21. $(-2ab^4)(-3a^2b^5)$
22. $(9xy^2)(-2x^2y^5)$
23. $\frac{16a^7}{2a}$
24. $\frac{24z^8}{-3z^3}$

25. $\dfrac{6a^4}{8a^8}$

26. $\dfrac{12x^3}{16x^4}$

27. $\dfrac{12x^3y^4}{18x^5y^2}$

28. $\dfrac{5v^4w^{-3}}{10v^8}$

29. $\dfrac{36a^{-2}b^3}{3ab^4}$

30. $\dfrac{-48ab^{10}}{-32a^4b^3}$

31. $(-2m^3n^2)(-3mn^2)^2$

32. $(2a^3b^2)^3(-4a^4b^2)$

33. $(x^{-2}y)^2(xy)^{-2}$

34. $(x^{-1}y^2)^{-3}(x^2y^{-4})^{-3}$

35. $\left(\dfrac{3a^2b^3}{6a^4b^4}\right)^2$

36. $\left(\dfrac{2ab^2c^3}{5ab^2}\right)^3$

37. $\dfrac{(-4x^2y^3)^2}{(2xy^2)^3}$

38. $\dfrac{(-3a^2b^3)^2}{(-2ab^4)^3}$

39. $\left(\dfrac{a^{-2}b}{a^3b^{-4}}\right)^2$

40. $\left(\dfrac{x^{-3}y^{-4}}{x^{-2}y}\right)^{-2}$

41. $\left(4a^{2/3}b^{1/2}\right)\left(2a^{1/3}b^{3/2}\right)$

42. $\left(6a^{3/5}b^{1/4}\right)\left(-3a^{1/5}b^{3/4}\right)$

43. $\left(-3x^{2/3}\right)\left(4x^{1/4}\right)$

44. $\left(-5x^{1/3}\right)\left(-4x^{1/2}\right)$

45. $\left(81x^8y^{12}\right)^{1/4}$

46. $\left(27x^3y^6\right)^{2/3}$

47. $\dfrac{16z^{3/5}}{12z^{1/5}}$

48. $\dfrac{6a^{2/3}}{9a^{1/3}}$

49. $\left(2x^{2/3}y^{1/2}\right)\left(3x^{1/6}y^{1/3}\right)$

50. $\dfrac{x^{1/3}y^{5/6}}{x^{2/3}y^{1/6}}$

51. $\dfrac{9a^{3/4}b}{3a^{2/3}b^{2}}$

52. $\dfrac{12x^{1/6}y^{1/4}}{16x^{3/4}y^{1/2}}$

1.7.3 C. Desarrolle los siguientes productos y agrupe a su mínima expresión

1. $(2x+4)(5x+1)$
2. $(5x-3)(2x+7)$
3. $(y+2)(y+1)$
4. $(y+5)(y+3)$
5. $(4z-3)(z-4)$
6. $(5z-6)(z-1)$
7. $(a+6)(a-3)$
8. $(a-10)(a+4)$
9. $(5x-11y)(2x-7y)$
10. $(3a-5b)(4a-7b)$
11. $(9x+5y)(2x+5y)$
12. $(3x-7z)(5x-7z)$
13. $(3p+5q)(2p-7q)$
14. $(2r-11s)(5r+8s)$
15. $(3c-2)(4c+1)(5c-2)$
16. $(4d-5)(2d-1)(3d-4)$
17. $(3x+5)(3x-5)$
18. $(4x^2-3y)(4x^2+3y)$
19. $(3x^2-y)^2$
20. $(6x+7y)^2$
21. $(4w+z)^2$
22. $(3x-5y^2)^2$
23. $[(x+5)+y][(x+5)-y]$
24. $[(x-2y)+7][(x-2y)-7]$

25. $(a+b)^3$

26. $(a-b)^3$

27. $(x-1)^3$

28. $(y+2)^3$

1.7.4 D. Desarrolle las siguientes divisiones de polinomios

1. $\dfrac{x^2-x-20}{3x-15}$
2. $\dfrac{2x^2-5x-12}{2x^2+5x+3}$
3. $\dfrac{x^3-9x}{x^3+x^2-6x}$
4. $\dfrac{x^3+125}{2x^3-50x}$
5. $\dfrac{a^3+8}{a^2-4}$
6. $\dfrac{y^3-27}{-y^2+11y-24}$
7. $\dfrac{x^2+3x-40}{-(x^2-3x-10)}$
8. $\dfrac{2x^3-6x^2+5x-15}{9-x^2}$
9. $\dfrac{4y^3-8y^2+7y-14}{-y^2-5y+14}$
10. $\dfrac{x^3-x^2+x}{x^3+1}$
11. $\left(-\dfrac{4a}{3b^2}\right)\left(\dfrac{6b}{a^4}\right)$
12. $\left(\dfrac{12x^2y}{5z^4}\right)\left(-\dfrac{25x^2z^3}{15y^2}\right)$
13. $\left(\dfrac{6p^2}{5q^2}\right)^{-1}\left(\dfrac{2p}{3q^2}\right)^2$
14. $\left(\dfrac{4r^2s}{3t^3}\right)^{-1}\left(\dfrac{6rs^3}{5t^2}\right)$
15. $\left(\dfrac{x^2+x}{2x+3}\right)\left(\dfrac{3x^2+19x+28}{x^2+5x+4}\right)$
16. $\left(\dfrac{x^2-16}{x^2+7x+12}\right)\left(\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-4x}\right)$
17. $\left(\dfrac{3x-15}{2x^2-50}\right)\left(\dfrac{2x^2+16x+30}{6x+9}\right)$
18. $\left(\dfrac{y^3-8}{y^2+y-6}\right)\left(\dfrac{y^2+3y}{y^3+2y^2+4y}\right)$
19. $\left(\dfrac{12y^2+28y+15}{6y^2+35y+25}\right)\div\left(\dfrac{2y^2-y-3}{3y^2+11y-20}\right)$
20. $\left(\dfrac{z^2-81}{z^2-16}\right)\div\left(\dfrac{z^2-z-20}{z^2+5z-36}\right)$
21. $\left(\dfrac{a^2+9}{a^2-64}\right)\div\left(\dfrac{a^3-3a^2+9a-27}{a^2+5a-24}\right)$

22. $\left(\dfrac{6x^2+13xy+6y^2}{4x^2-9y^2}\right) \div \left(\dfrac{3x^2-xy-2y^2}{2x^2+xy-3y^2}\right)$
23. $\dfrac{p+5}{r}+\dfrac{2p-7}{r}$
24. $\dfrac{2s+5t}{4t}+\dfrac{-2s+3t}{4t}$
25. $\dfrac{x}{x-5}+\dfrac{7x}{x+3}$
26. $\dfrac{2x}{3x+1}+\dfrac{5x}{x-7}$
27. $\dfrac{5y-7}{y+4}-\dfrac{2y-3}{y+4}$
28. $\dfrac{6x-5}{x-3}-\dfrac{3x-8}{x-3}$
29. $\dfrac{4z}{2z-3}+\dfrac{5z}{z-5}$
30. $\dfrac{3y-1}{3y+1}-\dfrac{2y-5}{y-3}$
31. $\dfrac{x}{x^2-9}-\dfrac{3x-1}{x^2+7x+12}$
32. $\dfrac{m-n}{m^2-mn-6n^2}+\dfrac{3m-5n}{m^2+mn-2n^2}$
33. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3x-1}\cdot\dfrac{3x^2+11x-4}{x-5}$
34. $\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{y+1}\cdot\dfrac{y^2-1}{y+4}$
35. $\dfrac{q+1}{q-3}-\dfrac{2q}{q-3}\cdot\dfrac{q+5}{q-3}$

1.7.5 E. Factorice las siguientes expresiones

1. $5x+20$
2. $8x^2+12x-40$
3. $-15x^2-12x$
4. $-6y^2-54y$
5. $10x^2y+6xy-14xy^2$
6. $6a^3b^2-12a^2b+72ab3$
7. $(x-3)(a+b)+(x-3)(a+2b)$
8. $(x-4)(2a-b)+(x+4)(2a-b)$
9. $x^2+7x+12$
10. $x^2+9x+20$
11. $a^2-10a-24$
12. $b^2+12b-28$
13. $6x^2+25x+4$
14. $8a^2+26a+15$
15. $51x^2-5x-4$
16. $57y^2+y-6$
17. $6x^2+xy-40y^2$
18. $8x^2+10xy-25y^2$
19. x^4+6x^2+5
20. x^4+11x^2+18
21. $6x^4+23x^2+15$
22. $9x^4+10x^2+1$
23. x^4-x^2
24. x^4+3x^2+2

25. $x^2y^2 - 2xy - 8$

26. $2x^2y^2 + xy - 1$

27. $3x^4 + 11x^2 - 4$

28. $2x^4 + 3x^2 - 9$

29. $3x^6 + 2x^3 - 8$

30. $8x^6 - 10x^3 - 3$

31. $x^2 - 9$

32. $x^2 - 64$

33. $4a^2 - 49$

34. $81b^2 - 16c^2$

35. $1 - 100x^2$

36. $1 - 121y^2$

37. $x^4 - 9$

38. $y^4 - 196$

39. $(x+5)^2 - 4$

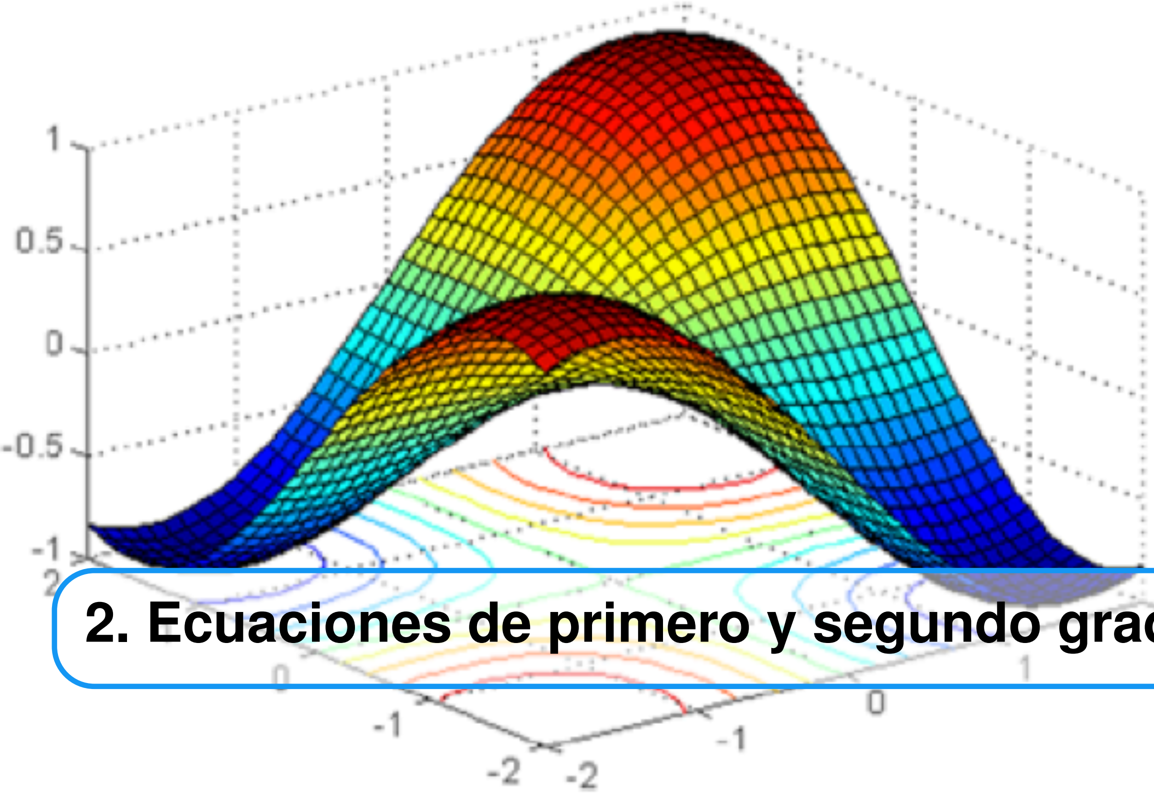
40. $(x-3)^2 - 16$

41. $x^2 + 10x + 25$

42. $y^2 + 6y + 9$

43. $a^2 - 14a + 49$

44. $b^2 - 24b + 144$



2. Ecuaciones de primero y segundo grado

2.1 Ecuaciones de 1er grado con una Incógnita

Una ecuación es una expresión matemática que establece que dos expresiones algebraicas tienen el mismo valor. Se utiliza el signo $(=)$ para igualar a las expresiones.

Cuando sólo aparece una variable que siempre está elevada al exponente 1, se tiene una **ecuación de primer grado con una incógnita.**

■ **Ejemplo 2.1** Las siguientes son ecuaciones de primer grado con una incógnita: $5x = 8, \quad 12y = 3 - y, \quad 3x + 10 = 8x$ ■

2.1.1 Partes de una ecuación

El signo de igualdad divide a la ecuación en dos partes. A la expresión algebraica del lado izquierdo del signo de igualdad $(=)$ se le llama **primer miembro de la ecuación**, y a la expresión algebraica del lado derecho del signo de igualdad se le llama **segundo miembro de la ecuación**.

En cada miembro, y separados por los signos $+$ y $-$, están los términos algebraicos. Hay dos clases de términos algebraicos: **términos con variables y términos sin variables**.

■ **Ejemplo 2.2** $7x - 10 + x - 2 = 6x - 3 + 3x - 1$

Términos con variables: $7x, \ x, \ 6x, \ 3x$

Términos sin variables (términos independientes): $-10, \ -2, \ -3, \ -1$ ■

2.1.2 Solución de una ecuación

Resolver una ecuación significa encontrar los valores de la incógnita x que hacen cierta la igualdad. Para resolver una ecuación se debe cumplir lo siguiente:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta una misma cantidad, la igualdad no se altera y se obtiene una ecuación equivalente a la original.
- Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por una misma cantidad diferente de cero, la igualdad no se altera y se obtiene una ecuación equivalente a la original.

Hay dos formas de resolver una ecuación: por tanteo y por procedimiento algebraico.

Solución por tanteo

Resolver una ecuación por tanteo consiste en ir probando valores para la incógnita hasta encontrar el que cumpla la igualdad.

■ **Ejemplo 2.3** $3x+2=2x+8$

Se aplican valores diferentes a la x para que se cumpla la igualdad: $0,1,2,3,\ldots$. Se observa que cuando $x=6$, se cumple la igualdad.

Esto significa que la solución de la ecuación es $x=6$.

Para comprobarlo, se sustituye el valor de la x en la ecuación y se verifica la igualdad.

$$\begin{aligned} 3\times 6+2 &= 2\times 6+8 \\ 20 &= 2\times 20 \end{aligned}$$

■

Solución por procedimiento algebraico

Una ecuación de primer grado con una incógnita se puede resolver más fácilmente simplificando las expresiones de los dos miembros de la ecuación, para luego despejar la incógnita mediante la adecuada transposición de términos de un lado al otro del signo de igualdad.

Los términos del lado izquierdo de la igualdad pasan al lado derecho con signo contrario. Los factores se pasan dividiendo y los divisores se pasan multiplicando, sin cambiar el signo.

La serie de pasos recomendados para obtener la incógnita son los siguientes:

Quitar denominadores. Se obtiene el máximo común denominador (*mcd*) de los denominadores. Se divide el *mcd* entre cada denominador y el resultado se multiplica por el numerador. Es importante recordar que si algún término no tiene denominador, el denominador es 1.

Quitar paréntesis. Para quintar los paréntesis, puede haber los siguientes casos:

- Delante del paréntesis hay un número multiplicando. Se aplica la propiedad distributiva.
- Delante del paréntesis no hay nada o hay un signo $+$. Se quita el paréntesis y lo que hay dentro permanece igual .
- Delante del paréntesis hay un signo $-$. Se quita el paréntesis y se cambia de signo todo lo que hay dentro del paréntesis.

Transponer términos semejantes. Consiste en tener en el primer miembro todos los términos conteniendo la variable, y en el segundo miembro todos los términos independientes. **Cuando un término pasa de un miembro a otro, cambia de signo**.

Reducir términos semejantes. Consiste en sumar y restar los términos semejantes en cada miembro para que sólo quede un único término conteniendo la variable y un único término independiente.

Despejar la variable. Consiste en dejar únicamente la variable. El coeficiente de la variable pasa al segundo miembro, de acuerdo a la siguiente regla: **si está multiplicando a la variable, pasa dividiendo al segundo miembro; si está dividiendo a la variable, pasa multiplicando al segundo miembro**. Con eso se obtiene, finalmente, la solución de la variable.

Comprobar la solución. Consiste en sustituir el valor de la variable en la ecuación y comprobar que se cumple la igualdad.

■ **Ejemplo 2.4** Resolver la siguiente ecuación y comprobar la solución.

$$\frac{4x}{2} - \frac{2x+7}{5} = 5$$

Solución:

1. Se hace la división de quebrados del primer miembro.
$$\frac{(4x)(5)-(2x+7)(2)}{10} = 5$$
2. Se pasa el denominador del primer miembro al segundo miembro.
$$(4x)(5)-(2x+7)(2) = 50$$
3. Se quitan los paréntesis del numerador del primer miembro, haciendo el producto de sus términos.
$$20x - 4x - 14 = 50$$
4. Se agrupan términos semejantes en los miembros de la ecuación.
$$20x - 4x = 50 + 14$$
5. Se reducen términos semejantes en los miembros de la ecuación.
$$16x = 64$$
6. Se despeja la variable x, obteniéndose la solución de la ecuación.
$$x = \frac{64}{16} = 4$$
7. Para comprobar la solución, se sustituye la variable x por el número 4 en la ecuación original.
$$\frac{(4)(4)}{2} - \frac{(2)(4)+7}{5} = 5$$
$$\frac{16}{2} - \frac{15}{5} = 5$$
$$8 - 3 = 5$$
$$5 = 5$$

■

2.1.3 Tipos de soluciones de una ecuación de 1er grado con una Incógnita

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen una solución única, como en el ejemplo anterior, ya que sólo hay un valor que hace que la igualdad se cumpla. **Sin embargo, pueden ocurrir los dos siguientes casos**:

1. Al resolver la ecuación $2x+5-x = x+3+2$, se tiene que
$$2x - x - x = 3 + 2 - 5$$
$$0x = 0$$
Cuando ocurre esto, se le llama **identidad** ya que para cualquier valor que se pruebe de x siempre se cumple la igualdad. Los dos miembros son iguales:
$$2x + 5 - x = x + 3 + 2$$
$$x + 5 = x + 5$$

2. Al resolver la ecuación $4x+10-x=3x+15$, se tiene que

$$4x-x-3x=15-10$$
$$0x=5$$

Cuando esto ocurre, la ecuación **no tiene solución** ya que no hay ningún número que multiplicado por 0 dé 5.

2.1.4 Problemas de ecuaciones de 1er grado con una Incógnita planteados con palabras

Los problemas planteados con palabras son enunciados que expresan relaciones entre cantidades numéricas. El objetivo es traducir la expresión del problema a una ecuación algebraica que pueda resolverse por medios conocidos.

Para resolver un problema planteado con palabras que involucre una ecuación de primer grado con una Incógnita, es aconsejable seguir los siguientes pasos:

Comprender el enunciado. Se debe leer el problema las veces que sean necesarias para distinguir los datos conocidos y el dato desconocido que se quiere encontrar (incógnita). Se escriben los datos del problema, pensando a que dato se le llamará x; los demás datos se ponen en función de x.

Plantear la ecuación. Entendiendo los datos y traduciendo lenguaje ordinario a lenguaje algebraico, se plantea (escribe) la ecuación.

Resolver la ecuación. Mediante el método de resolución de ecuaciones, se obtiene la solución.

Comprobar la solución. Se sustituye el valor encontrado de x en la ecuación, y se comprueba que se cumplen las condiciones del problema.

■ **Ejemplo 2.5** Si al doble de un número se le suman 15, se obtiene 51. ¿Cúal es ese número?

1. Datos. Al número buscado se le llamará x.
2. Planteamiento de la ecuación. El problema se traduce a lenguaje algebraico.

$$2x+15=51$$

3. Solución de la ecuación. Método de resolución de ecuaciones.

$$2x=51-15$$
$$2x=36$$
$$x=18$$

4. Comprobación de la solución. Se comprueba si el resultado cumple las condiciones del problema.

$$(2)(18)+15=51$$
$$51=51$$

■

■ **Ejemplo 2.6** En una ferretería se venden tornillos en cajas de tres tamaños: pequeña, mediana y grande. La caja grande contiene el doble que la mediana y la mediana 25 tornillos más que la pequeña. He comprado una caja de cada tamaño y en total hay 375 tornillos, ¿cuántos tornillos hay en cada caja?

1. Datos.
   Como la caja grande está en función de la caja mediana y ésta, a su vez, está en función de la caja pequeña, entonces se le llamará x al número de tornillos en la caja pequeña.
   Caja pequeña: x
   Caja mediana: $x+25$
   Caja grande: $2(x+25)$

2. Planteamiento de la ecuación. La suma de los tornillos de las tres cajas es igual a 375 traducida a lenguaje algebraico es:

$$x+(x+25)+2(x+25)=375$$

3. Solución de la ecuación. Método de resolución de ecuaciones.

$$x+x+25+2x+50=375$$

$$x+x+2x=375-25-50$$

$$4x=300$$

$$x=\frac{300}{4}=75$$

4. Comprobación de la solución.
   Sustituyendo x por 75 en los datos de cada caja se tiene:
   Caja pequeña: 75 tornillos
   Caja mediana: $75+25=100$ tornillos
   Caja grande: $2(75+25)=200$ tornillos

■

■ **Ejemplo 2.7** Juan tiene 8 años más que su hermana Inés. Dentro de 5 años, la edad de Juan será el doble que la de Inés. ¿Qué edad tiene cada uno hoy?

1. Datos.

	Edad hoy	Edad dentro de 5 años
Inés	x	$x+5$
Juan	$x+8$	$x+8+5$

2. Planteamiento de la ecuación. Para plantear la ecuación se toman los datos de dentro de 5 años. La edad de Juan dentro de 5 años será el doble que la de Inés dentro de 5 años.

$$x+8+5=2(x+5)$$

3. Solución de la ecuación. Método de resolución de ecuaciones.

$$x+8+5=2x+10$$

$$x-2x=10-8-5$$

$$-x=-3$$

$$x=3$$

Solución: Inés tiene 3 años y Juan tiene 11 años.

■

■ **Ejemplo 2.8** Un padre tiene 43 años y su hijo19 años. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era el triple que la del hijo?

1. Datos.

	Edad hoy	Edad hace x años
Padre	43	$43-x$
Hijo	19	$19-x$

2. Planteamiento de la ecuación. Para plantear la ecuación se toman los datos de hace x años. La edad del padre hace x años era el triple que la del hijo hace x años.

$$43-x=3(19-x)$$

3. Solución de la ecuación. Método de resolución de ecuaciones.

$$43-x=57-3x$$

$$-x+3x=57-43$$

$$2x=14$$

$$x=7$$

4. Comprobación de la solución.

	Edad hoy	Edad hace x años
Padre	43	$43-7=36$ años (el triple del hijo)
Hijo	19	$19-7=12$ años

Solución: Hace 7años la edad del padre era el triple que la del hijo.

■

■ **Ejemplo 2.9** Una parcela rectangular es 15 metros más larga que ancha. La valla que la rodea tiene una longitud de 150 metros. ¿Cuáles las dimensiones de la parcela?

1. Datos. Se denominará x al ancho y $x+15$ al largo del rectángulo. El perímetro es de 150 metros.

2. Planteamiento de la ecuación. El perímetro de un rectángulo es igual a la suma de todos sus lados: 2 largos + 2 anchos.

$$2x+2(x+15)=150$$

3. Solución de la ecuación. Método de resolución de ecuaciones.

$$2x+2x+30=150$$

$$4x=120$$

$$x=30$$

Solución:
Ancho: $x=30\ m$ Largo: $x+15=30+15=45\ m$. La parcela mide 30 m × y 45 m.

4. Comprobación de la solución.

$$(2)(30)+(2)(45)=60+90=150\ m$$

■

■ **Ejemplo 2.10** Los dos lados iguales de un triángulo isósceles son 3 cm más cortos que el lado desigual, y su perímetro es de 48 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

1. Datos. En el triángulo isósceles (2 lados iguales y uno desigual), x será el valor del lado desigual y $x-3$ el valor de cada uno de los lados iguales.
   Lado desigual: x
   Lado igual: $x-3$
   Perímetro: 48 cm

2. Planteamiento de la ecuación. El perímetro de un triángulo isósceles es igual a la suma de todos sus lados: 2 lados iguales + 1 lado desigual.

$$2(x-3)+x=48$$

3. Solución de la ecuación. Método de resolución de ecuaciones.

$$2x-6+x=48$$

$$2x+x=48+6$$

$$3x=54$$

$$x=18$$

   Solución:
   Lado desigual: $x=18$ cm
   Lado igual: $x-3=18-3=15$ m

4. Comprobación de la solución.

$$(2)(15)+18=30+18=48\ cm$$

■

■ **Ejemplo 2.11** En una bodega hay dos clases de vino, uno barato a $3 Dls/litro y otro caro a $ 7 Dls/litro. ¿Cuántos litros tiene que haber de cada clase para obtener 80 litros de mezcla a $ 5.50 Dls/litro?

1. Datos.

Producto	Cantidad (litros)	Precio ($Dls / litro)	Costo total ($Dls)
Vino barato	x	3	$3x$
Vino caro	$80-x$	7	$7(80-x)$
Mezcla	80	5.5	$(80)(5.5)=440$

2. Planteamiento de la ecuación. De los datos del coste total: el costo del vino barato + el costo del vino caro = al costo de la mezcla.

$$3x+7(80-x)=440$$

3. Solución de la ecuación. Método de resolución de ecuaciones.

$$3x+560-7x=440$$

$$3x-7x=440-560$$

$$-4x=-120$$

$$x=30$$

Solución:
Vino barato: $x = 30\ Lt$
Vino caro: $80 - x = 80 - 30 = 50\ Lt$
Se mezclan 30 litros del vino barato con 50 litros del vino caro.

4. Comprobación de la solución.

$$(30)(3) + (50)(7) = (80)(5.5)$$

$$90 + 350 = 440$$

$$440 = 440$$

■

2.2 Ejercicios

2.2.1 F. Ecuaciones de 1er grado con una incógnita, sin denominadores

1. $2x+1=21$
2. $7=x+3$
3. $8x-5x=x+8$
4. $3x=9x+12$
5. $3x+6=2x+13$
6. $5x-7=2-4x$
7. $5x-8+2x=7+4x-9$
8. $3x+x+4=2x+30$
9. $4x+7-x=5+2x$
10. $4-2x+13=10-9x+7$
11. $7x-10+x-2=6x-3+3x-1$
12. $5x-7+2x=3x-3+4x-5+x$
13. $(x-5)-(4x+7)=6+3x$
14. $13-(x+5)=4x-(6x-5)$
15. $3(4x-1)-2(5x-3)+3x=-11-2x$
16. $7x-2(5-x)=3+2x+1$
17. $3(x-2)-5(2x-1)+2(3x+4)+10=-x$
18. $5x-3(2x-1)=1-4(x-2)$
19. $3(4x-1)-2(5x-3)=11-2x+16$
20. $5(2-2x)+3(x-6)=16-4(6+2x)+x$
21. $(2x-1)-(x-7)=2$
22. $3(3x-2)-7x-1=6(2x-7)-15x$

2.2.2 G. Ecuaciones de 1er grado con una incógnita, con denominadores

1. $\frac{x}{2}-\frac{2}{5}=\frac{x}{5}+\frac{1}{2}$
2. $\frac{x}{3}+\frac{2x}{4}-1=5-\frac{x}{6}$
3. $\frac{2x-10}{4}-\frac{x-5}{18}=\frac{x-5}{9}$
4. $\frac{6x}{2}-2=\frac{5x+1}{6}$
5. $\frac{x+2}{3}+\frac{4x-20}{5}=x-4$
6. $\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-4}{10}=2(x-5)$
7. $\frac{2(3-x)}{9}+4=\frac{2(-4x-15)}{3}$
8. $4-\frac{3-x}{3}=\frac{x+2}{4}+\frac{2-6x}{6}$
9. $\frac{x}{4}+\frac{5}{2}-\frac{x}{6}=5$
10. $\frac{x-5}{4}-\frac{x-5}{36}=\frac{x-1}{9}$
11. $\frac{x+1}{6}-\frac{4-x}{3}=\frac{2x}{4}-2$
12. $10x-\frac{55-x}{2}=\frac{10x-55}{2}$
13. $\frac{5x+7}{2}-\frac{2x-4}{3}=\frac{4x+6}{4}+5$
14. $1-\frac{x-5}{4}-\frac{x-3}{10}=-\frac{x+3}{8}$

2.2.3 H. Problemas de edades

1. Aníbal tiene 15 años, su hermana 12 y su madre 40. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad de la madre?

2. Un padre tiene 40 años y su hijo 10. ¿Cuántos años han de transcurrir para que el padre tenga el doble de edad que su hijo?

3. La edad de una abuela es 6 veces la de su nieta, pero dentro de 8 años, sólo será el cuádruple. ¿Cuál es la edad de cada una?

4. Melisa tiene el triple de edad que su hija Martha. Calcular la edad de cada una sabiendo que dentro de 12 años la edad de Melisa será el doble que la de Martha.

5. Luis le preguntó a su prima María cuantos años tenía y María le contestó lo siguientes: "si al triple de los años que tenía el año pasado le restas los años que tendré dentro de 30 años, obtendrás la mitad de los años que tengo ahora."

6. Antonio tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

7. La edad de Pedro es 4 veces la edad de su hija Ana. En cambio hace 6 años, la edad de Pedro era 10 veces la edad de Ana. Calcular la edad actual de cada uno.

2.2.4 I. Problemas de geometría

1. La base de un rectángulo es el doble que la altura, y el perímetro mide 78 cm. Calcular la base y la altura.

2. La base de un rectángulo es 7 cm más larga que la altura, y el perímetro mide 54 cm. Calcular la base y la altura.

3. Calcular la longitud de los lados de un triángulo isósceles, sabiendo que el perímetro mide 50 cm y que el lado desigual es 7 cm menor que uno de los lados iguales.

4. El mayor de los ángulos de un triángulo se diferencia en 20º del mediano y éste se diferencia en 20º del menor. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo? (Nota: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180º).

5. Una finca rectangular mide 150 m de larga. Si fuera 30 m más larga y 20 m más ancha, su superficie sería 6,000 m^2 mayor. ¿Cuánto mide el ancho de la finca?

6. Los lados de un rectángulo miden 25 cm y 18 cm, respectivamente. Quitando a cada lado el mismo número de cm se obtiene otro rectángulo de 66 cm de perímetro. ¿Cuántos cm se han quitado a cada lado?

7. En un cuadrilátero, el ángulo B mide 5º más que el ángulo A, el ángulo C es el triple del ángulo B y el ángulo D mide 5º más que el ángulo C. ¿Cuánto mide cada ángulo? (Nota: La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es siempre 360º.)

2.2.5 J. Problemas de mezclas

1. Un comerciante tiene dos clases de aceite. Una clase A de $2.25 el litro y otra clase B de $2.00 el litro. ¿Cuántos litros se deben mezclar de cada clase de aceite para obtener 50 litros a $2.20 el litro?

2. El dueño de un restaurante mezcla café superior de $10/kg con cierta cantidad de café inferior de $8/kg. Así obtiene 10 *kg* de mezcla que sale a $9.50/kg. ¿Qué cantidad de cada clase de café empleó?

3. Mezclando vino de $2.00/litro con otro vino de $3.50/litro, se han obtenido 500 litros a $2.90/litro. ¿Cuántos litros de cada clase de vino se han empleado?

4. En mi bolsillo llevo 10 monedas, unas de 5 centavos y otras de 20 centavos. En total llevo $1.40. ¿Cuántas monedas llevo de cada clase?

5. ¿Cuántos litros de aceite de girasol a $0.75/litro se deben mezclar con 15 litros de aceite de oliva a $3.75/litro, para que la mezcla salga a $3/litro?

6. ¿Qué cantidad de café de $7.20/kg se han de mezclar con 8 kg de café superior de $9.30/kg para obtener una mezcla que salga a un precio de $8.40/kg?

7. Un fabricante de queso ha mezclado cierta cantidad de leche de vaca a $0.50/litro con otra cantidad de leche de oveja a $0.80/litro, obteniendo 300 litros de mezcla a un precio de $0.70/litro. ¿Cuántos litros de cada clasede leche empleó?

2.2.6 K. Problemas varios

1. Si a un número se le quita 13, se obtiene 91. ¿Cuál es el número?

2. Si al triple de un número se le resta 16, se obtiene 29. ¿Cuál es ese número?

3. La suma de dos números consecutivos es 95. ¿Cuáles son esos números?

4. En un colegio, entre alumnos y alumnas hay 624. Si el número de alumnas supera en 36 al de alumnos, ¿cuántos alumnos y cuantas alumnas hay?

5. Irene y Alejandro tienen 73 CDs de música. Irene tiene el doble que Alejandro más 1. ¿Cuántos CDs tienen cada uno?

6. Tres amigos van de compras. Juan gasta el doble que Alicia y Ana gasta el triple que Alicia. Si entre los tres han gastado $72, ¿cuánto ha gastado cada uno?

7. Sabiendo que un pantalón es $5 más caro que una camisa y que si compro 6 pantalones y 4 camisas pago $480, ¿cuánto vale el pantalón y la camisa?

8. Un kilo de chirimoyas cuesta el doble que uno de naranjas. Por 3 kilos de chirimoyas y 5 de naranjas he pagado $11. ¿Cuánto vale el kilo de cada una?

9. En un concierto hay 432 personas. Si sabemos que hay 48 mujeres más que hombres, ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?

10. Para una fiesta se han comprado 340 refrescos. De naranja hay el triple que de cola. De limón el doble que de cola menos 20 ¿Cuántos refrescos hay de cada clase?

11. Entre Ana y María tienen \$270. Si Ana tiene el doble que María más \$30, ¿cuánto tiene cada una?

12. En un avión viajan 330 pasajeros de tres países: españoles, alemanes y franceses. Hay 30 franceses más que alemanes, y de españoles hay el doble que de franceses y alemanes juntos. ¿Cuántos hay de cada país?

13. Un USB vale \$25 más que un CD. Si compro 2 USBs y 3 CDs pago \$300. ¿Cuánto cuesta un USB? ¿Cuánto cuesta un CD?

14. Si hay \$2,800 en billetes de \$500 y de \$100, de manera que el número de billetes de \$100 es el doble que el de \$500. ¿Cuántos billetes de cada clase se tienen?

15. Tres personas se reparten \$3,000. Una recibe \$65 más que otra, y ésta \$200 más que una tercera persona. ¿Qué dinero recibe cada una?

2.3 Ecuaciones de 1er grado con dos Incógnitas

Una ecuación de primer grado (lineal) en dos variables (o incógnitas) tiene la forma general $ax+by+c=0$, donde a, b, y c representan números reales, y las tres no pueden ser iguales a cero, a la misma vez.

■ **Ejemplo 2.12** Las siguientes expresiones son ejemplos de ecuaciones de primer grado con dos Incógnitas:

1. $2x+3y-2=0$
2. $4x-9y+1=0$
3. $7y=21x$
4. $5y-3x=4$
5. $10a-12b=60$
6. $3x+0y=21$

■

Hallar la solución de una ecuación de primer grado en dos variables (también conocida como ecuación lineal con dos incógnitas) consiste en encontrar aquellos valores para cada variable que hacen cierta o satisfacen a la ecuación.

La solución **es un conjunto infinito de elementos de la forma de par ordenado** (x,y)**, que satisfacen a la ecuación**. Para entender las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se plantea el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 2.13** En una bolsa hay un total de 40 bolas, entre bolas azules y bolas rojas. ¿Cuántas bolas hay de cada color?

1. Datos.
   Bolas azules: x
   Bolas rojas: y

2. Planteamiento de la ecuación.
$$x+y=40$$
   La ecuación es una ecuación de primer grado con dos incógnitas (x e y).

3. Solución de la ecuación. Para resolver la ecuación se despeja una incógnita. Por ejemplo, la y.
$$y=40-x$$
   Los valores numéricos de la y dependen de los valores que tenga la x. Tabulando diferentes valores, se tiene:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	39	38	37	36	35	34	33	32	...

   Esto es, la ecuación $y=40-x$ tiene varias soluciones:

   1a. solución: 1 bola roja y 39 bolas azules = 40 bolas
   2a. solución: 2 bolas rojas y 38 bolas azules = 40 bolas
   3a. solución: 3 bolas rojas y 37 bolas azules = 40 bolas
   ...

■

2.4 Sistema de ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas

Para encontrar **una solución única** a la ecuación de primer grado con dos incógnitas, es necesario tener más restricciones que permitan plantear una segunda ecuación. Con ello se tendrá un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

■ **Ejemplo 2.14** En una bolsa hay un total de 40 bolas, entre bolas azules y bolas rojas. Si al triple de bolas azules se le resta el doble de bolas rojas hay 70 bolas. ¿Cuántas bolas hay de cada color?

1. Datos.
   Bolas azules: x
   Bolas rojas: y

2. Planteamiento de la ecuación.
   1a. ecuación (de la 1a. frase): En una bolsa hay un total de 40 bolas, entre bolas azules y bolas rojas
   $$x+y=40$$
   2a. ecuación (de la 2a. frase): Si al triple de bolas azules se le resta el doble de bolas rojas, hay 70 bolas
   $$3x-2y=70$$
   Esto es, se tiene un sistema de 2 ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas.
   $$\begin{aligned} x+y &= 40 \\ 3x-2y &= 70 \end{aligned}$$
3. Solución. La solución del sistema de 2 ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas significa encontrar el valor de x y el valor de y cumpliendo las condiciones dadas. Para este caso, la solución es:
   Bolas azules: $x=30$
   Bolas rojas: $x=10$
4. Comprobación de la solución. En el sistema de ecuaciones se tiene:
   $$\begin{aligned} 30+10 &= 40 \\ 3(30)-2(10) &= 70 \end{aligned}$$

■

2.5 Solución de sistemas de dos ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas

2.5.1 Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución. Las operaciones que permiten pasar de un sistema de ecuaciones a otro equivalente son las siguientes:

- Sumar un mismo número a ambos miembros de una de las ecuaciones del sistema.
- Multiplicar ambos miembros de una de las ecuaciones del sistema por un número distinto de cero.
- Sumar una ecuación a otra previamente multiplicada por un número cualquiera.
- Despejar una incógnita en una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Mediante cualquiera de los métodos relacionados se obtiene un sistema equivalente al dado y, por tanto, tendrá las mismas soluciones que el sistema inicial.

2.5.2 Clasificación de sistemas de dos ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas

Los sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se clasifican según la existencia o no de soluciones y, en el primer caso, el número de ellas. La clasificación de los sistemas es la siguiente:

Sistema compatible: es el que tiene solución. Dependiendo del número de soluciones puede ser:

- Sistema compatible determinado si tiene una única solución.
- Sistema compatible indeterminado si tiene número infinito de soluciones.

Sistema incompatible: es el que no tiene solución.

2.5.3 Métodos se solución de sistemas de ecuaciones

Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución se tienen los siguientes pasos:

1. Se despeja una incógnita, x ó y, de una de las dos ecuaciones (la que parezca más fácil de despejar).
2. Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación.
3. Se resuelve la ecuación resultante, que es de primer grado con una incógnita, y se obtiene el valor de una de las incógnitas.
4. Se sustituye el valor obtenido en la ecuación despejada al principio, para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Se comprueban los resultados, sustituyendo los valores obtenidos de x y de y en las dos ecuaciones para verificar que si se cumplen.

■ **Ejemplo 2.15** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\begin{aligned} x+y &= 40 \\ 3x-2y &= 70 \end{aligned}$$

1. Solución.
   Despejando a x en primera ecuación se tiene $x = 40-y$.
   Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación, para obtener el valor de y, se tiene:
   $$\begin{aligned} 120-3y-2y &= 70 \\ -3y-2y &= 70-120 \\ -5y &= -50 \\ y &= 10 \end{aligned}$$
   Para calcular x, se sustituye el valor de $y = 10$ en la primera ecuación.
   $$\begin{aligned} x &= 40-10 \\ x &= 30 \end{aligned}$$
   Por tanto, la solución es: $x = 30$, $y = 10$.

2. Comprobación de la solución.
   $$\begin{aligned} 30+10 &= 40 \\ 120-(3)(10)-(2)(10) &= 70 \end{aligned}$$

■

Método de reducción

Antes de desarrollar este método, es necesario recordar que dada una ecuación $ax+by=c$, se puede obtener otra equivalente (con las mismas soluciones) multiplicando toda la ecuación por un número distinto de cero. Así las siguientes ecuaciones tienen las mismas soluciones.

Para aplicar el método de reducción se multiplicarán las dos ecuaciones, o una de ellas, por un número conveniente, de manera que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente cambiado de signo en las dos ecuaciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción se tienen los siguientes pasos:

1. Se multiplican los dos miembros de una ecuación (y en algunos casos los de las dos ecuaciones) por números convenientes, para que en las dos ecuaciones los coeficientes de una de las incógnitas sean números opuestos.
2. Se suman las dos ecuaciones quedando una ecuación con una incógnita, la cual será fácil de resolver.
3. Se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.
4. Se comprueban los resultados, sustituyendo los valores obtenidos de x y de y en las dos ecuaciones para verificar que si se cumplen.

■ **Ejemplo 2.16** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\begin{aligned} x+y &= 40 \\ 3x-2y &= 70 \end{aligned}$$

1. Solución.
   Se multiplica la primera ecuación por (-3) y el resultado se suma algebraicamente a la segunda ecuación, para eliminar la variable x. Con ello se obtiene el valor de y.

   $$\begin{aligned} -3x-3y &= -120 \\ 3x-2y &= 70 \\ \hline -5y &= -50 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

   Para calcular x, se sustituye el valor de $y=10$ en la primera ecuación.

   $$\begin{aligned} x &= 40-10 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

   Por tanto, la solución es: $x=30$, $y=10$.

2. Comprobación de la solución.

   $$\begin{aligned} 30+10 &= 40 \\ 120-(3)(10)-(2)(10) &= 70 \end{aligned}$$

■

Método de reducción doble

Consiste en aplicar el método de reducción dos veces. En la primera vez se elimina una incógnita y en la segunda vez se elimina la otra incógnita.

■ **Ejemplo 2.17** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\begin{aligned} x+y &= 40 \\ 3x-2y &= 70 \end{aligned}$$

1. Solución.
   Se multiplica la primera ecuación por (-3) y el resultado se suma algebraicamente a la segunda ecuación, para eliminar la variable x. Con ello se obtiene el valor de y.

   $$\begin{array}{r} -3x-3y=-120 \\ 3x-2y=70 \\ \hline -5y=-50 \\ y=10 \end{array}$$

   Se multiplica la primera ecuación por (-2) y el resultado se suma algebraicamente a la segunda ecuación, para eliminar la variable y. Con ello se obtiene el valor de x.

   $$\begin{array}{r} 2x+2y=80 \\ 3x-2y=70 \\ \hline 5x=150 \\ x=30 \end{array}$$

   Por tanto, la solución es: $x=30$, $y=10$.

2. Comprobación de la solución.
   $$\begin{aligned} 30+10 &= 40 \\ 120-(3)(10)-(2)(10) &= 70 \end{aligned}$$

■

Método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de igualación se tienen los siguientes pasos:

1. Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones (la que parezca más fácil de despejar).
2. Se igualan las expresiones quedando una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido para la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones y, con procedimientos algebraicos, se obtiene el valor de la otra incógnita. También se puede sustituir en una de las dos ecuaciones obtenidas en el punto 1.

■ **Ejemplo 2.18** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$\begin{aligned} x+y &= 40 \\ 3x-2y &= 70 \end{aligned}$$

1. Solución.
   Se despeja x en las dos ecuaciones:
   De la primera ecuación: $x = 40 - y$
   De la segunda ecuación: $x = \frac{70+2y}{3}$

   Se igualan las dos expresiones resultantes, y se despeja el valor de y.

$$\begin{aligned} 40 - y &= \frac{70+2y}{3} \\ 3(40 - y) &= 70 + 2y \\ 120 - 3y &= 70 + 2y \\ -3y - 2y &= 70 - 120 \\ -5y &= -50 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

   Para calcular x, se sustituye el valor de $y = 10$ en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x &= 40 - 10 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

   Por tanto, la solución es: $x = 30$, $y = 10$.

2. Comprobación de la solución.

$$\begin{aligned} 30 + 10 &= 40 \\ 120 - (3)(10) - (2)(10) &= 70 \end{aligned}$$

■

2.5.4 Problemas planteados con palabras que involucran sistemas de ecuaciones

Hay problemas planteados con palabras que se resuelven mediante un sistema de ecuaciones. Los pasos que se deben seguir para encontrar la solución son:

1. Despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones (la que parezca más fácil de despejar).
2. Comprender el problema. Identificar los datos y las incógnitas.
3. Plantear el sistema de ecuaciones.
4. Resolver el sistema de ecuaciones por el método que parezca más conveniente.
5. Comprobar la solución.

■ **Ejemplo 2.19** En un examen María resolvió bien 4 problemas de álgebra y 2 de geometría, obteniendo una calificación de 8 puntos. Abel resolvió bien 2 problemas de álgebra y 4 de geometría, obteniendo una calificación de 7 puntos. ¿Cuántos puntos vale cada tipo de problema?

1. Datos.
   Puntuación de cada problema de álgebra: x
   Puntuación de cada problema de geometría: y

2. Planteamiento de las ecuaciones.
   1a. ecuación (de la 1a. frase): María resuelve bien 4 problemas de álgebra y 2 de geometría, obteniendo una calificación de 8 puntos.

$$4x + 2y = 8$$

   2a. ecuación (de la 2a. frase): Abel resuelve bien 2 problemas de álgebra y 4 de geometría, obteniendo una calificación de 7 puntos.

$$2x+4y=7$$

Esto es, se tiene un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\begin{aligned} 4x+2y &= 8 \\ 2x+4y &= 7 \end{aligned}$$

3. Solución.
Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de reducción.
Para que se eliminen las x, se multiplica la segunda ecuación por (-2), y luego se suman algebraicamente las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 4x+2y=8 \\ -4x-8y=-14 \\ \hline -6y=-6 \end{array}$$

Por tanto, despejando $y=1$.

Para calcular x, se sustituye el valor de $y=1$ en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} 4x+2y &= 8 \\ 4x+(2)(1) &= 8 \\ 4x &= 8-2 \\ x &= \frac{6}{4}=1.5 \end{aligned}$$

Concluyendo, la solución al problema es:

Puntuación de cada problema de álgebra: x = 1.5 puntos
Puntuación de cada problema de geometría: y = 1 punto

4. Comprobación de la solución.
Examen de María: (4)(1.5) + (2)(1)= 6 + 2 = 8 puntos
Examen de Abel: (2)(1.5) + (4)(1)= 3 + 4 = 7 puntos

■

■ **Ejemplo 2.20** Un hotel tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 84 habitaciones y 154 camas. ¿Cuántas habitaciones dobles y sencillas hay?

1. Datos.
Número de habitaciones dobles: x
Número de habitaciones sencillas: y

2. Planteamiento de las ecuaciones.
1a. ecuación: Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas (total 84 habitaciones).

$$x+y=84$$

2a. ecuación: Las habitaciones dobles (2 camas) y las habitaciones sencillas (1 cama) tienen un total de 154 camas.

$$2x+y=154$$

Esto es, se tiene un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\begin{aligned} x+y &= 84 \\ 2x+y &= 154 \end{aligned}$$

3. Solución.
   Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.
   Despejando a x en la primera ecuación se tiene $x = 84 - y$, y sustituyendo su valor en la segunda ecuación se obtiene el valor de y.

$$\begin{aligned} 2(84-y)+y &= 154 \\ 168-2y+y &= 154 \\ -2y+y &= 154-168 \\ y &= 14 \end{aligned}$$

   Para calcular x, se sustituye el valor de $y = 14$ en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x &= 84-14 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

   Por tanto, la solución al problema es:

   Número de habitaciones dobles: $x = 70$
   Número de habitaciones sencillas: $y = 14$

4. Comprobación de la solución.
   Número de camas en 70 habitaciones dobles = 140
   Número de camas en 14 habitaciones sencillas = 14

■

2.6 Ejercicios

2.6.1 L. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Aplicar el método de sustitución

1. $\begin{cases} 2x-y= & 7 \\ x+2y= & 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x-3y= & 2 \\ 3x-9y= & 6 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x-2y= & 5 \\ 6x-4y= & -3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x+y= & 7 \\ x+3y= & 11 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x+3y= & 3 \\ 5x+6y= & 3 \end{cases}$

2.6.2 M. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Aplicar el método de reducción

1. $\begin{cases} 5x-y= & 7 \\ 3x+2y= & 12 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-2y= & 10 \\ x+3y= & 7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x-5y= & 2 \\ 3x-2y= & 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 6x-4y= & 20 \\ 3x-2y= & 10 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x+y= & 40 \\ 3x+3y= & 100 \end{cases}$

2.6.3 N. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Aplicar el método de reducción doble

1. $\begin{cases} 2x-y= & 9 \\ 2x+7y= & 17 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 7x-5y= & 10 \\ 2x-3y= & -5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x-3y= & 0 \\ 2x+3y= & 12 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 5x-2y= & 14 \\ x+4y= & 16 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 4x+7y= & 3 \\ 6x-2y= & 1 \end{cases}$

2.6.4 O. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Aplicar el método que se considere más conveniente.

Nota: en algunos ejercicios habrá que transformar las ecuaciones para que queden en la forma habitual.

1. $\begin{cases} 2x+y-10 = & 0 \\ 2(x+3y) = & 12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 0.6x+0.2y = & 8 \\ 0.4x+0.2y = & 5.8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{5} = & 7 \\ \frac{2x}{8}-\frac{3y}{9} = & -2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x+3y = & 4x-9 \\ 3(x+y) = & 13-2(4-5y) \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x+2}{3} = & x-y \\ 2x+y = & \frac{y+3}{6} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{2y}{3} = & \frac{1}{2} \\ \frac{5x}{4}+\frac{2y}{3} = & \frac{3}{4} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-2(x+y) = & 3y-2 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2} = & 3 \end{cases}$

2.6.5 P. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Problemas planteados con palabras

1. Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?

2. El doble de la suma de dos números es 32 y su diferencia es 0. ¿Qué números son?

3. La suma de dos números es 12 y la mitad de uno de ellos el doble del otro. ¿Qué números son?

4. Se tienen dos números cuya suma es 0. Si a uno de ellos se le suman 123 se obtiene el doble del otro. ¿Qué números son?

5. Hallar un número de dos cifras que cumpla las siguientes condiciones: La segunda cifra es el doble de la primera. La suma de las cifras es 12.

6. Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime. Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?

7. Hoy se compraron 3 canicas de cristal y 2 de acero por $1.45. Ayer se compraron 2 de cristal y 5 de acero por $1.70. Determinar el precio de una canica de cristal y de una de acero.

8. Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.

9. Averiguar el número de animales de una granja sabiendo que:
   a) la suma de gansos y vacas es 132 y la de sus patas es 402.
   b) se necesitan 200 kg al día para alimentar a las gallinas y a los gallos. Se tiene un gallo por cada 6 gallinas y se sabe que una gallina come una media de 500g, la mitad que un gallo.
   c) se piensa que la sexta parte de los conejos escapan al comedero de las vacas, lo que supone el triple de animales en dicho comedero.

2.6.6 Q. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Problemas varios planteados con palabras.

1. En un estacionamiento hay 55 vehículos entre autos y motocicletas. Si el total de ruedas es de 170. ¿Cuántos autos y cuántas motocicletas hay?

2. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan \$7.80. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan \$13.20. ¿A cómo está el kilo de plátanos y el de peras?

3. En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 14 cabezas y 38 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?

4. He comprado un DVD y me ha costado \$105. Lo he pagado con 12 billetes de dos tipos, de \$5 y de \$10. ¿Cuántos billetes de cada clase he entregado?

5. Un fabricante de focos gana \$0.30 por cada foco que sale de la fábrica, pero pierde \$0.40 por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2,100 focos obtuvo una ganancia de \$484.40. ¿Cuántas focos buenos y cuántos defectuosos fabricó ese día?

6. Hallar dos números tales que la suma de un tercio del primero más un quinto del segundo sea igual a 12, y que si se multiplica el primero por 5 y el segundo por 7 se obtiene 300 como suma de los dos productos.

7. El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo.

8. Seis camisetas y cinco gorras cuestan \$227. Cinco camisetas y 4 gorras cuestan \$188. Halla el precio de una camiseta y de una gorra.

9. En un examen de 30 preguntas se obtienen 0.75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0.25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10.5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?

10. Calcular dos números cuya suma sea 191 y su diferencia sea 67.

11. Entre María y Pedro tienen un total de 65 CDs . Se sabe que Pedro tiene 7 CDs más que María. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?

12. Un grupo de amigos planea una excursión a la montaña. Llaman a un albergue para preguntar cuántas habitaciones hay. La persona que les atiende les dice que hay 70 camas disponibles repartidas en 29 habitaciones y que las habitaciones son dobles y triples. ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

13. En el mes de enero un vendedor de automóviles vende 3 autos del modelo A y 5 del modelo B, llegando a unas ventas de \$165,000. En el mes de febrero vende 2 autos del modelo A y 4 del modelo B, por un total de \$122,000. Calcular el precio de cada modelo de auto.

14. Se compró un cuaderno que costaba \$3.00 y para pagarlo se utilizaron nueve monedas, unas de 20 centavos y otras de 50 centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase se utilizaron?

2.7 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación es de segundo grado cuando la incógnita aparece elevada al cuadrado (exponente 2). Las ecuaciones de segundo grado pueden ser completas o incompletas.

2.7.1 Ecuaciones de segundo grado completas

Las ecuaciones de segundo grado completas tienen la forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

donde a es el coeficiente de x^2, b es el coeficiente de x y c es el coeficiente independiente.

La solución de una ecuación de segundo grado completa implica conocer el valor de x, el cual se puede encontrar con:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donde el término b^2-4ac se llama descriminante.

Las soluciones de una ecuación de segundo grado completa dependen del valor del discriminante, de acuerdo con lo siguiente:

1. Si el discriminante $b^2-4ac>0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. Si el discriminante $b^2-4ac>0$, las dos soluciones son iguales: $x_1=x_2$.
3. Si el discriminante $b^2-4ac<0$, la ecuación no tiene solución dentro de los números reales, porque la raíz cuadrada de un número negativo es un número imaginario.

■ **Ejemplo 2.21** Encontrar la solución de $2x^2+4x-6=0$
Solución.
$a=2$, $b=4$, $c=-6$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-4+\sqrt{4^2-(4)(2)(-6)}}{(2)(2)} \\ &= \frac{-4+\sqrt{64}}{4} \\ &= \frac{-4+8}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{-4-\sqrt{4^2-(4)(2)(-6)}}{(2)(2)} \\ &= \frac{-4-\sqrt{64}}{4} \\ &= \frac{-4-8}{4} \\ &= -3 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.22** Encontrar la solución de $x^2+2x+1=0$
Solución.
$a=1$, $b=2$, $c=1$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-2+\sqrt{2^2-(4)(1)(1)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-2+\sqrt{0}}{2} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{-2-\sqrt{2^2-(4)(1)(1)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-2-\sqrt{0}}{2} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.23** Encontrar la solución de $2x^2+2x+1=0$
Solución.
$a=2$, $b=2$, $c=1$

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= \frac{-2\pm\sqrt{2^2-(4)(2)(1)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

La ecuación no tiene solución en los números reales. ■

2.7.2 Ecuaciones de segundo grado incompletas

Una ecuación de segundo grado es incompleta con cualquiera de tres casos:

De la forma $ax^2+c=0$. Es decir, cuando la ecuación no tiene el término de x.
En este caso, la solución se encuentra despejando directamente la x.

De la forma $ax^2+bx=0$. Es decir, cuando la ecuación no tiene el coeficiente independiente.
En este caso, la solución se encuentra sacando a x como factor común, y luego se despeja de la ecuación.

De la forma $ax^2=0$. Es decir, cuando no tiene el término de x y no tiene el término independiente.
En este caso, la solución es siempre $x=0$.

Nota importante: Si la ecuación de segundo grado no está en cualquiera de sus formas correspondientes, antes de resolverla se deben dar los pasos algebraicos necesarios para que tenga la forma correspondiente.

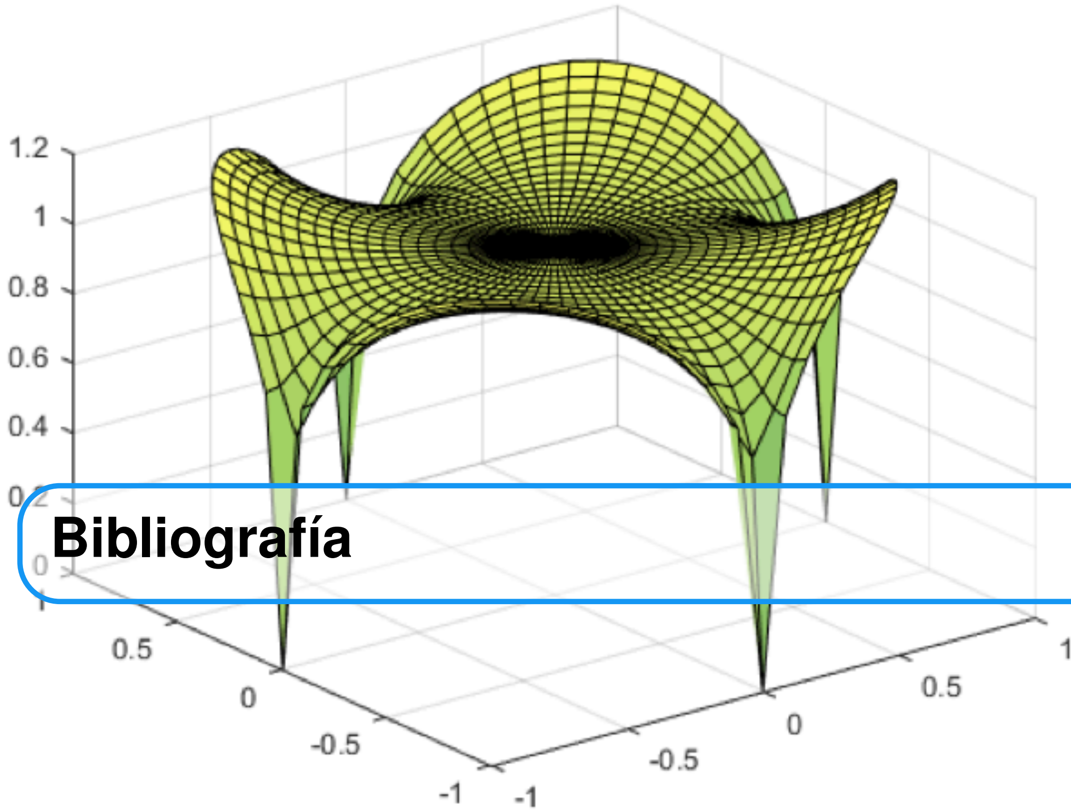
2.8 Ejercicios

2.8.1 R. Ecuaciones de segundo grado completas

1. $x^2-5x+6=0$
2. $x^2+x-6=0$
3. $x^2+2x+1=0$
4. $x^2+x+1=0$
5. $2x^2-7x+3=0$
6. $x^2-5x-84=0$
7. $2x^2+3x-27=0$
8. $4x^2+7x-2=0$
9. $x^2-10x+9=0$
10. $x^2-4x+4=0$
11. $-x^2+4x-7=0$
12. $2x^2+4x=30$
13. $3x^2+1=-4x$
14. $3x^2=5x+2$
15. $(x+3)(x-5)=0$
16. $(x+4)^2=0$
17. $(x-5)^2-9=0$
18. $18=6x+x(x-13)$
19. $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$
20. $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$

2.8.2 S. Ecuaciones de segundo grado incompletas

1. $x^2 - 49 = 0$
2. $3x^2 - 39 = 0$
3. $x^2 + 25 = 0$
4. $-x^2 = 64$
5. $x^2 + 8x = 0$
6. $x^2 = 3x$
7. $4x^2 = -32x$
8. $-5x^2 + 12x = 0$
9. $\frac{x^2}{6} = -x$
10. $9x^2 = 0$
11. $4x^2 + 2 = 0$
12. $12x^2 = 3x$



Bibliografía

[1] R. N. AUFMANN, *College algebra and trigonometry* Houghton Mifflin Company, 2008

[2] T. WALLACE, *Beginning and Intermediate Algebra* An open source book. Creative Commons, 2010

[3] R. LARSON, *Algebra and Trigonometry* 8th Ed. USA: Brooks/Cole, 2010

[4] K. E. MARTIN-GAY, *Beginning & Intermediate Algebra* 6th Ed. USA: Pearson, 2016

[5] A. BALDOR, *Algebra* 4a Ed. México: Patria, 2019

[6] M. DE LA L. ALMANZA MÁRQUEZ Y S. O. R. ESCOBAR MEDINA, *Unidad Didáctica: Álgebra Superior. Notas* 1a Ed. México: Universidad Autónoma de Zacatecas, 2019